Marius Perianu
Mircea Fianu
Dana Heuberger

Matematică

Clasa a VIII-a

II

Cuprins

III. Variante de subiecte pentru teză

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

4. Exprimarea în limbajul s pecific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

1.2. Identificarea componentelor unei expresii algebrice

1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date

1.5. Identificarea corpurilor geometrice și a elementelor metrice necesare pentru calcularea ariei sau a volumului acestora

2.2. Aplicarea unor reguli de calcul cu numere reale exprimate prin litere

2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule

2.5. Prelucrarea unor date caracteristice ale corpurilor geometrice studiate în vederea calculării unor elemente ale acestora

3.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat și a unor algoritmi pentru rezolvarea ecuațiilor și a inecuațiilor

3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora

3.5. Alegerea metodei adecvate pentru calcularea unor caracteristici numerice ale corpurilor geometrice

4.2. Exprimarea matematică a unor situații concrete prin calcul algebric

4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale

4.5. Utilizarea unor termeni și expresii specifice pentru descrierea proprietăților figurilor și corpurilor geometrice

5.2. Interpretarea unei situații date utilizând calcul algebric

5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar

5.5. Analizarea condițiilor necesare pentru ca o configurație geometrică spațială să verifice anumite cerințe date

6.2. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea ecuațiilor sau a formulelor de calcul prescurat

6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală

6.5. Interpretarea informațiilor referitoare la distanțe, arii și volume după modelarea printr-o configurație spațială a unei situații date din cotidian

Algebră

I

Calcul algebric în $\mathbb{R}$. Funcții. Elemente de statistică

I.1 Ecuația de gradul al doilea

Ecuația de gradul al doilea cu o necunoscută

Ecuațiile de forma:

$$ax^2 + bx + c = 0,\text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

se numesc *ecuații de gradul al doilea* cu coeficienți reali.
Numerele reale a, b, c se numesc *coeficienții ecuației*, iar x este numit *necunoscută*.
Un număr real x_0, pentru care $ax_0^2 + bx_0 + c = 0$, se numește soluție a ecuației.

Exemple

1 Coeficienții ecuației $5x^2 + 8x - 4 = 0$ sunt $a = 5$, $b = 8$, $c = -4$.
Numărul real -2 este o soluție a acestei ecuații, deoarece $5 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) - 4 = 0$.

2 Coeficienții ecuației $x^2 + 4x - 21 = 0$ sunt $a = 1$, $b = 4$, $c = -21$.
O soluție a acestei ecuații este 3, întrucât $3^2 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$. Cum $(-7)^2 + 4 \cdot (-7) - 21 = 0$, deducem că -7 este o altă soluție. Putem nota: $x_1 = 3$ și $x_2 = -7$.

3 Ecuația $2x^2 - 6x = 0$ are coeficienții $a = 2$, $b = -6$, $c = 0$, deoarece ecuația se scrie și sub forma $2x^2 - 6x + 0 = 0$. Se observă că 0 este soluție a acestei ecuații. O altă soluție este 3.

4 Ecuația $4x^2 + 11 = 0$ se poate rescrie $4x^2 + 0 \cdot x + 11 = 0$, deci are coeficienții $a = 4$, $b = 0$, $c = 11$.
Această ecuație nu are soluții reale, deoarece $4x^2 + 11 > 0$, pentru orice număr real x.

Observație. Ecuațiile de gradul al doilea care au una dintre formele:

$$(1)\ ax^2 + bx = 0; \qquad (2)\ ax^2 + c = 0$$

se numesc ecuații de gradul al doilea incomplete.

Metode de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Având în vedere că produsul a două numere reale este egal cu 0 dacă și numai dacă cel puțin unul dintre factori este 0, pentru a rezolva o ecuație de gradul al doilea de forma:

$$\text{(E) } ax^2 + bx + c = 0,\text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

este suficient să descompunem expresia $ax^2 + bx + c$ ca produs de factori de forma $mx + n$.

De exemplu, ecuația $x^2 = p$, $p > 0$, învățată în clasa a VII-a, are soluțiile $x_1 = -\sqrt{p}$ și $x_2 = \sqrt{p}$, întrucât au loc echivalențele:

$$x^2 = p \Leftrightarrow x^2 - p = 0 \Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{p}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \sqrt{p}\right)\left(x - \sqrt{p}\right) = 0.$$

În cele ce urmează, vom prezenta rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea incomplete (pentru care $b = 0$ sau $c = 0$), metoda descompunerii în factori și metoda completării pătratului unei sume, din care vom deduce formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea.

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea incomplete

Ecuațiile de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$, iar $b = 0$ sau $c = 0$, se pot rezolva utilizând strategii învățate anterior: descompunerea în factori și rezolvarea ecuației de forma $x^2 = r$, $r \in \mathbb{R}$.

1 Ecuația $ax^2 + bx = 0$, cu $b \neq 0$, se rescrie $x(ax + b) = 0$ și are două soluții: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

2 Ecuația $ax^2 + c = 0$, cu $c \neq 0$, este echivalentă cu $x^2 = -\frac{c}{a}$.

Dacă $-\frac{c}{a} < 0$, ecuația nu are soluții. Dacă $-\frac{c}{a} > 0$, atunci ecuația are două soluții: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3 Ecuația $ax^2 = 0$ este echivalentă cu $x^2 = 0$ și este verificată doar de numărul real 0.

Exemple

1 Ecuația $x^2 + 6x = 0$ se scrie $x(x + 6) = 0$, de unde rezultă $x = 0$ sau $x + 6 = 0$.
Ecuația are două soluții reale: $x_1 = 0$, $x_2 = -6$.

2 Ecuația $2x^2 - 18 = 0$ se scrie $2x^2 = 18$ sau $x^2 = 9$ și are două soluții reale: $x_1 = -3$ și $x_2 = 3$.

3 Ecuația $4x^2 + 56 = 0$ este echivalentă cu $4x^2 = -56$ sau cu $x^2 = -14$.
Această ecuație nu are soluții reale.

Metoda descompunerii în factori

Această metodă constă în scrierea expresiei $ax^2 + bx + c$ ca produs de doi factori de forma $mx + n$:

$$ax^2 + bx + c = (m_1x + n_1)(m_2x + n_2),$$

unde m_1, n_1, m_2, n_2, sunt numere reale, cu $m_1m_2 \neq 0$.
Dacă o astfel de descompunere se poate realiza, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale:

$$x_1 = -\frac{n_1}{m_1},\ x_2 = -\frac{n_2}{m_2}.$$

În cazul $a = 1$, des întâlnit în exerciții, putem considera $m_1 = m_2 = 1$, pentru care obținem:

$$(*) \quad x^2 + bx + c = (x + n_1)(x + n_2).$$

Deoarece:

$$(x + n_1)(x + n_2) = x^2 + (n_1 + n_2)x + n_1n_2,$$

pentru a găsi o descompunere de forma $(*)$ este suficient să determinăm două numere reale n_1 și n_2 astfel încât $n_1 + n_2 = b$ și $n_1n_2 = c$.

Exemple

1 Considerăm ecuația $x^2 + 8x + 12 = 0$. Două numere cu suma 8 și produsul 12 sunt 2 și 6.
Au loc echivalențele:

$$x^2 + 8x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) + 6(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x + 2) = 0,$$

de unde rezultă că ecuația are două soluții reale: $x_1 = -6$, $x_2 = -2$.

2 Pentru a rezolva ecuația $x^2 - 3x - 10 = 0$ prin metoda descompunerii în factori, căutăm două numere reale cu suma -3 și produsul -10. Întrucât $-10 = 2 \cdot (-5)$ și $-3 = 2 + (-5)$, obținem:

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 5x - 10 = 0 \Leftrightarrow x(x + 2) - 5(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 2) = 0,$$

deci ecuația $x^2 - 3x - 10 = 0$ are două soluții reale: $x_1 = -2$, $x_2 = 5$.

Metoda completării pătratului unei sume/diferențe

Folosind formulele de calcul al pătratului unei sume sau al unei diferențe, au loc egalitățile:

$$(mx+n)^2 = m^2x^2 + 2mnx + n^2; \qquad (mx-n)^2 = m^2x^2 - 2mnx + n^2.$$

Metoda completării pătratului unei sume/diferențe presupune prelucrarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ astfel încât termenii ax^2 și bx să se poată scrie sub forma m^2x^2, respectiv $2mnx$, urmată de completarea formulei corespunzătoare cu termenul n^2, adunând sau scăzând un număr convenabil.

Exemple

1 Fie ecuația $x^2 + 6x - 40 = 0$.
Suma $x^2 + 6x$ face parte dintr-o dezvoltare de forma $(x+n)^2$ și, întrucât $6x = 2 \cdot x \cdot 3$, rezultă $n = 3$. Pentru a obține pătratul unei sume, vom completa suma $x^2 + 6x$ cu termenul $3^2 = 9$. Ecuația se scrie echivalent astfel:

$$x^2 + 6x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9) - 40 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 - 49 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 49.$$

Rezultă că $x + 3 = -7$ sau $x + 3 = 7$, deci ecuația are două soluții reale: $x_1 = -10$ și $x_2 = 4$.

2 Fie ecuația $x^2 - 10x - 8 = 0$. Suma $x^2 - 10x$ face parte dintr-o dezvoltare de forma $(x-n)^2$ și, întrucât $10x = 2 \cdot x \cdot 5$, pentru a obține pătratul unei diferențe, vom completa cu termenul $5^2 = 25$. Ecuația se scrie echivalent astfel:

$$x^2 - 10x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 25) - 8 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 - 33 = 0 \Leftrightarrow (x-5)^2 = 33.$$

Rezultă $x - 5 = -\sqrt{33}$ sau $x - 5 = \sqrt{33}$. Ecuația are două soluții reale: $x_1 = 5 - \sqrt{33}$ și $x_2 = 5 + \sqrt{33}$.

3 Considerăm ecuația $4x^2 - 20x + 9 = 0$. Întrucât $4x^2 = (2x)^2$ și $20x = 2 \cdot 2x \cdot 5$, obținem:

$$4x^2 - 20x + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 25 + 9 - 25 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2 = 16,$$

de unde rezultă $2x - 5 = -4$ sau $2x - 5 = 4$. Ecuația are două soluții reale: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{9}{2}$.

4 Fie ecuația $-4x^2 + 24x - 36 = 0$. Împărțind ambii membri ai ecuației prin -4, ecuația devine $x^2 - 6x + 9 = 0$, adică $(x-3)^2 = 0$. Rezultă că $x - 3 = 0$, deci ecuația are doar soluția $x = 3$.
Observație. Deoarece egalitatea $(x-3)^2 = 0$ se poate scrie și $(x-3)(x-3) = 0$, iar produsul a doi factori este 0 dacă unul dintre factori este 0, prin convenție se spune că ecuația $(x-3)^2 = 0$ are două soluții reale egale: $x_1 = x_2 = 3$.

Formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Metoda descompunerii în factori pune în evidență o strategie generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea. Considerăm ecuația:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Împărțind ambii membri ai ecuației prin a, obținem: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Formăm pătratul unei sume: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$, de unde $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

a Dacă $b^2 - 4ac < 0$, ecuația nu are soluții, deoarece în ultima egalitate, membrul stâng este mai mare sau egal cu 0, iar membrul drept este negativ.

b Dacă $b^2 - 4ac = 0$, ecuația devine $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ și are două soluții reale egale: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

c Dacă $b^2 - 4ac > 0$, obținem $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$, de unde rezultă că $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ecuația are două soluții reale distincte: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ și $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Formula generală de rezolvare a ecuației de gradul al doilea

Fie ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
Numărul $b^2 - 4ac$ se numește *discriminantul ecuației* și se notează cu Δ (*delta*). Atunci:

a dacă $\Delta < 0$, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are nicio soluție reală;

b dacă $\Delta = 0$, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale egale: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

c dacă $\Delta > 0$, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale distincte: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Etapele de rezolvare a unei ecuații de gradul al doilea utilizând formula generală

1 Fie ecuația $x^2 + 16x + 39 = 0$.

Pasul 1 Identificăm coeficienții ecuației: $a = 1$, $b = 16$, $c = 39$.

Pasul 2 Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = 16^2 - 4 \cdot 1 \cdot 39 = 256 - 156 = 100$.

Pasul 3 Precizăm natura soluțiilor: deoarece $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale diferite.

Pasul 4 Aflăm soluțiile ecuației: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 10}{2} = -13$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 10}{2} = -3$.

2 Fie ecuația $x^2 + 8x + 16 = 0$.

Pasul 1 Identificăm coeficienții ecuației: $a = 1$, $b = 8$, $c = 16$.

Pasul 2 Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$.

Pasul 3 Precizăm natura soluțiilor: cum $\Delta = 0$, ecuația are două soluții reale egale.

Pasul 4 Determinăm soluțiile ecuației: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2} = -4$.

3 Fie ecuația $2x^2 - 11x + 19 = 0$.

Pasul 1 Identificăm coeficienții ecuației: $a = 2$, $b = -11$, $c = 19$.

Pasul 2 Calculăm discriminantul ecuației: $\Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 19 = 121 - 152 = -31$.

Pasul 3 Precizăm natura soluțiilor: deoarece $\Delta < 0$, ecuația nu are soluții reale.

Exersare

Activitate pe echipe

1 Lucrând în echipă cu colegul de bancă, completați, în tabelele următoare, coeficienții fiecăreia dintre ecuațiile de gradul al doilea indicate, ca în modelul dat:

$ax^2 + bx + c = 0$	a	b	c
$8x^2 - 13x + 5 = 0$	8	−13	5
$2x^2 - 7x + 4 = 0$			
$-3x^2 + 12x - 11 = 0$			
$-x^2 - x + 6 = 0$			

$ax^2 + bx + c = 0$			
$7x^2 + 14x = 0$			
$-5x^2 = 0$			
$4x^2 - 9 = 0$			
$2x^2 - 3x - 35 = 0$			

Activitate online

2 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții.

P_1: $x = 1$ este soluție a ecuației $x^2 - 9x + 8 = 0$.

P_2: $x = 2$ este soluție a ecuației $x^2 + 5x - 14 = 0$.

P_3: $x = -2$ este soluție a ecuației $3x^2 - 5x - 22 = 0$.

P_4: $x = -1$ nu este soluție a ecuației $x^2 + 8x - 4 = 0$.

P_5: $x = 1$ nu este soluție a ecuației $7x^2 - 4x - 3 = 0$.

P_6: $x = -4$ nu este soluție a ecuației $-2x^2 + 7x - 4 = 0$.

P_7: $x = 1$ este soluție a ecuației $19x^2 + 32x - 51 = 0$.

P_8: $x = -1$ nu este soluție a ecuației $13x^2 + 47x + 34 = 0$.

P_9: $x = \sqrt{5}$ este soluție a ecuației $-2x^2 + x\sqrt{5} + 5 = 0$.

P_{10}: $x = 1 - \sqrt{2}$ este soluție a ecuației $x^2 - 3x - \sqrt{2} = 0$.

Activitate pe echipe

3 Lucrând în echipă cu colegul de bancă, completați tabelul următor. Pentru fiecare ecuație, calculați discriminantul și precizați numărul de soluții reale, ca în modelul dat:

	Ecuația	**Discriminantul (Δ)**	**Numărul soluțiilor reale**
a	$2x^2 - 5x + 1 = 0$	$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 17$	Ecuația are două soluții reale distincte.
b	$-3x^2 + 7x - 5 = 0$	$\Delta = 7^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-5) = -11$	Ecuația nu are soluții reale.
c	$x^2 + 13x + 12 = 0$		
d	$-8x^2 - 10x - 2 = 0$		
e	$2x^2 + 8x + 8 = 0$		
f	$5x^2 - 12x + 9 = 0$		
g	$-2\sqrt{2}x^2 + 4x + 1 = 0$		
h	$-x^2 + 4\sqrt{3}x - 12 = 0$		
i	$-5x^2 + 3x - \frac{1}{4} = 0$		
j	$\frac{3}{4}x^2 - \sqrt{\frac{75}{8}}x + \frac{11}{9} = 0$		

Activitate online

4 Rezolvați următoarele ecuații de gradul al doilea incomplete:

a $3x^2 + 9x = 0$; **b** $-2x^2 + 10x = 0$; **c** $6x^2 + \sqrt{12}x = 0$; **d** $-3\sqrt{2}x^2 - 5x = 0$;

e $17x^2 - 153 = 0$; **f** $-12x^2 + 25 = 0$; **g** $11x^2 + 33 = 0$; **h** $-4x^2 - 7\sqrt{2} = 0$.

5 Rezolvați ecuațiile următoare, utilizând metoda descompunerii în factori:

a $x^2 - 10x + 9 = 0$; **b** $x^2 + 8x + 15 = 0$; **c** $3x^2 + 11x + 8 = 0$; **d** $6x^2 - 17x + 10 = 0$;

e $3x^2 + 8x + 4 = 0$; **f** $x^2 + 8x - 20 = 0$; **g** $x^2 - 3x - 40 = 0$; **h** $5x^2 + 8x - 21 = 0$.

Consolidare

15 **a** Diferența dintre pătratul unui număr real și triplul numărului este 54. Aflați numărul.

b Suma dintre un număr real și dublul inversului său este $\frac{17}{6}$. Aflați numărul.

Activitate pe echipe

16 **a** Diferența a două numere reale este egală cu 9, iar produsul lor este 70. Aflați numerele.

b Suma a două numere reale este 31, iar produsul lor este 240. Aflați numerele.

c Suma a două numere reale este 4, iar suma inverselor lor este tot 4. Aflați numerele.

17 **a** Suma a două numere reale este 12, iar suma pătratelor lor este 74. Aflați numerele.

b Diferența a două numere reale este -8 , iar suma pătratelor lor este 130. Aflați numerele.

c Aflați două numere reale pozitive cu media aritmetică egală cu 13 și media geometrică egală cu 12.

18 Ioana are un frate cu 5 ani mai mare decât ea. Produsul vârstelor celor doi copii este egal cu suma vârstelor părinților. Știind că mama este cu 4 ani mai mică decât tatăl, iar la nașterea primului copil, mama avea 28 de ani, aflați vârsta celor patru membri ai familiei Ioanei.

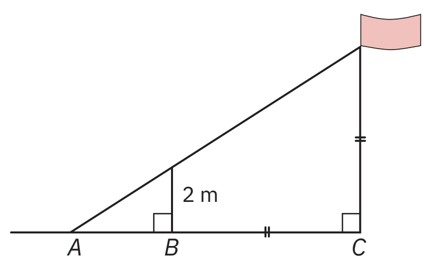
19 O tribună are 756 de locuri pe scaune. În zonele laterale sunt câte 6 scaune pe rând, ca în figura alăturată. În zona centrală, numărul de scaune de pe fiecare rând este cu 12 mai mare decât numărul de rânduri. Aflați numărul de locuri din zona centrală.

20 Un grup de foști colegi vor să închirieze un restaurant pentru o reuniune, plătind 1080 de lei. În urma unor evenimente neprevăzute, trei persoane nu mai pot participa, ceea ce face ca prețul închirierii să crească cu 5 lei de persoană. Aflați numărul participanților la reuniune.

21 Determinați dimensiunile unui dreptunghi care are lungimea cât triplul lățimii și aria de 75 cm^2.

22 Aria unui dreptunghi este egală cu 78 m^2, iar lățimea este cu 7 metri mai mică decât lungimea. Determinați perimetrul dreptunghiului.

23 În figura alăturată, distanța dintre punctele B și C este cu 3 m mai mare decât distanța dintre punctele A și B. Aflați la ce înălțime se află steagul, știind că aceasta este egală cu distanța de la B la C.



24 Determinați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, știind că aria triunghiului este egală cu 84 m^2, iar lungimea unei catete este cu 10 metri mai mare decât dublul lungimii celeilalte catete.

25 **a** Un triunghi dreptunghic are lungimile laturilor de x cm, $2x + 2$ cm și $2x + 3$ cm, $x \in \mathbb{R}_+$. Calculați perimetrul și aria triunghiului.

b Un triunghi dreptunghic are lungimile laturilor de x cm, $x + 7$ cm și $x + 9$ cm, unde $x > 0$ este un număr real. Calculați aria cercului circumscris triunghiului.

38 **(Acțiuni civice)** Asociația „Pentru copii“ dorește să reamenajeze un loc de joacă, pentru care este necesară o sumă de 14400 de lei, egal împărțită între sponsorii asociației. În urma unei acțiuni de strângere de fonduri, trezorierul asociației observă că, deoarece s-au adăugat 4 noi sponsori, efortul financiar al fiecărui sponsor este cu 600 de lei mai mic decât cel inițial. Câți sponsori are, în final, asociația și cât este contribuția fiecăruia?

Aprofundare

39 **a** Exprimați egalitățile următoare ca ecuații de gradul al doilea cu necunoscuta x și determinați x în funcție de t:

i $(x+t)^2-5(x-t)=(2t-x)(2t+x)+xt$; **ii** $(x-3t)(x-4t)=7x-26t-10$.

b Exprimați egalitățile următoare ca ecuații de gradul al doilea cu necunoscuta y și calculați y în funcție de x:

i $(x+y)^2-5(x-y)=(2y-x)(2y+x)+xy$; **ii** $9x^2-12xy+4y^2+42x-28y+49=0$.

40 Folosind identitatea $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$, determinați cea mai mică valoare a fiecăreia dintre expresiile de mai jos și numărul real x pentru care se obține acea valoare:

a $x^2-8x+12$; **b** x^2-6x+1; **c** x^2+3x-1; **d** x^2+x+1;

e $3x^2-12x+12$; **f** $2x^2+20x+58$; **g** $2x^2-2x+1$; **h** $5x^2+10x+1$.

Indicație. f Deoarece $\Delta=20^2-4\cdot2\cdot58=-64$, obținem

$$2x^2+20x+58=2\cdot\left(x+\frac{20}{2\cdot2}\right)^2-\frac{-64}{4\cdot2}=2\cdot(x+5)^2+8.$$

Cum $(x+5)^2\geq0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, rezultă $2x^2+20x+58=2\cdot(x+5)^2+8\geq2\cdot0+8=8$, deci valoarea minimă a expresiei $2x^2+20x+58$ este 8 și se obține atunci când $x+5=0$, adică pentru $x=-5$.

41 Folosind identitatea $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$, determinați cea mai mare valoare a fiecăreia dintre expresiile de mai jos și numărul real x pentru care se obține acea valoare:

a $-x^2+4x-3$; **b** $-x^2+2x+2$; **c** $-x^2-4x-5$; **d** $-x^2-10x-25$;

e $-2x^2+3x-1$; **f** $-3x^2+6x-6$; **g** $-2x^2+5x-11$; **h** $-5x^2-2x-4$.

42 **a** Se consideră ecuația $ax^2+bx+c=0$, $a\neq0$, cu soluțiile reale x_1 și x_2. Arătați că $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

b Pentru fiecare dintre ecuațiile de gradul al doilea de mai jos, verificați dacă numărul real x_1 indicat este soluție a ecuației și determinați soluția x_2 folosind relația demonstrată la punctul **a**.

i $x^2-5x+4=0$, $x_1=4$; **ii** $\dfrac{7}{3}x^2+5x-36=0$, $x_1=3$; **iii** $\dfrac{3}{7}x^2-2x+\dfrac{11}{7}=0$, $x_1=1$;

iv $5x^2+4x-1=0$, $x_1=-1$; **v** $\sqrt{2}x^2+3x-\sqrt{50}=0$, $x_1=\sqrt{2}$; **vi** $6x^2+5x-6=0$, $x_1=\dfrac{2}{3}$.

Testul 1

(2p) **1** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a $x^2 - 144 = 0$; **b** $x^2 + 2x = 0$;

c $x^2 - 15x + 50 = 0$; **d** $-6x^2 + 15x - 11 = 0$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

P: $x = 5$ nu este soluție a ecuației $-3x^2 + 11x + 20 = 0$.

(1p) **3** Rezolvați ecuația $(x+1)^2 - 5x^2 = 2(x-3)^2 - (x+2)^2$.

(2p) **4** Aflați intersecția mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 3x + 2 = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x + 4 = 0\}$.

(2p) **5** Se consideră ecuația $mx^2 - (2m+3)x + m + 1 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

a Determinați m pentru care ecuația admite soluția $x = -\frac{1}{2}$.

b Aflați valorile lui m pentru care ecuația are două soluții reale distincte.

(1p) **6** La o petrecere aniversară, fiecare copil primește câte o cutie cu bomboane de ciocolată, care conține un număr de bomboane cu exact 10 mai mare decât numărul copiilor prezenți la petrecere. În total, au fost oferite 336 de bomboane. Câte bomboane conține o cutie?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(2p) **1** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a $x^2 - 256 = 0$; **b** $x^2 - 4x = 0$;

c $x^2 - 17x + 70 = 0$; **d** $-9x^2 + 26x - 19 = 0$.

(1p) **2** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

P: $x = -4$ este soluție a ecuației $3x^2 + x - 44 = 0$.

(1p) **3** Rezolvați ecuația $(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 = (x+1)^2 + 1$.

(2p) **4** Aflați reuniunea mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6x + 9 = 0\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x - 18 = 0\}$.

(2p) **5** Se consideră ecuația $(m+2)x^2 + (2m+5)x + m + 1 = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq -2$.

a Determinați m pentru care ecuația admite soluția $x = -\frac{2}{3}$.

b Aflați valorile lui m pentru care ecuația are două soluții reale distincte.

(1p) **6** Profesorul de muzică așază cei 40 de membri ai corului școlii pe câteva rânduri, egale numeric. Numărul de elevi de pe fiecare rând este cu 6 mai mare decât numărul de rânduri. Câți elevi sunt pe fiecare rând?

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

P Fișă pentru portofoliul individual

A1

Numele și prenumele: ....

Clasa a VIII-a:

Ecuația de gradul al doilea

(2p) **1** Completați spațiile libere pentru a obține enunțuri adevărate.

a Discriminantul ecuației $x^2 + x + 1 = 0$ este egal cu ....

b Soluțiile ecuației $x^2 - 49 = 0$ sunt $x_1 = -7$ și $x_2 = \dots$.

c Ecuația $x^2 - 7x + m = 0$ are soluția $x = 1$ dacă numărul real m este egal cu ....

d Cardinalul mulțimii $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 7x + 12 = 0\}$ este egal cu ....

(2p) **2** Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.

a Numărul real -1 este soluție a ecuației $(x + 3)^2 + (x + 1)^2 = 5$. A F

b Numărul real -2 **nu** este soluție a ecuației $(x + 3)(x + 1) = 5x^2 - 21$. A F

c Ecuația $2x^2 + 9x + 11 = 0$ nu are soluții reale. A F

d Ecuația $(x - 1)^2 + x^2 + (x + 1)^2 = 11$ are două soluții reale egale. A F

(2p) **3** Încercuiți pe fișă doar răspunsul corect. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerință, una este corectă.

a Suma soluțiilor ecuației $x^2 + 7x - 44 = 0$ este:

A -2 **B** -7 **C** 22 **D** 15.

b Produsul soluțiilor ecuației $-3x^2 + 23x - 18 = 0$ este:

A -11 **B** -3 **C** 18 **D** 6.

c Numărul real m pentru care ecuația $x^2 - 16x - 2m + 56 = 0$ are o singură soluție este:

A -4 **B** 8 **C** -8 **D** 12.

d Numărul real care adunat cu inversul său dă suma egală cu -2 se află în intervalul:

A $(-3, -2)$ **B** $\left[-2, -\frac{3}{2}\right)$ **C** $\left[-\frac{3}{2}, -1\right)$ **D** $[-1, 0)$.

La următoarele subiecte scrieți pe fișă rezolvările complete.

(1p) **4** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a $3x(x - 3) - 2(x^2 - 3x + 4) = -(x - 2)(x + 1)$;

b $\dfrac{5x - 8}{x - 2} = \dfrac{2x + 24}{x + 1}$.

(2p) **5** Un triunghi dreptunghic are lungimile laturilor de $x + 7$, $x + 5$ și $x - 2$, unde $x > 2$ este un număr real. Calculați lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.